~ CURS 2 ~

I.4. Elemente ideale de circuit în complex

Pentru a putea rezolva circuitele în domeniul complex, este utilă cunoașterea modului de reprezentare a elementelor pasive de circuit în domeniul complex, precum și transformarea ecuațiilor de funcționare a fiecărui element în raport cu teoremele prezentate anterior. De aceea, pentru fiecare element în parte vom prezenta simbolul și ecuațiile atât în timp, cât și în complex, precum și evidențierea defazajului dintre curentul și tensiunea la borne.

A. Rezistorul ideal

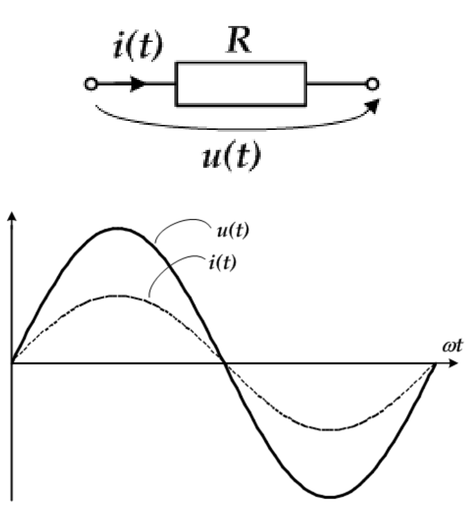


Fig. 1.7a. Rezistorul în domeniul timp (simbol și variații mărimi)

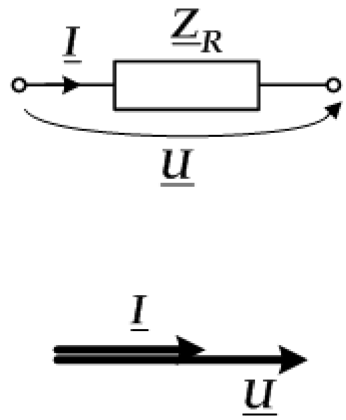


Fig. 1.7b. Rezistorul în domeniul complex (simbol și variații mărimi)

Ecuațiile caracteristice în domeniul timp, cât și complex sunt:

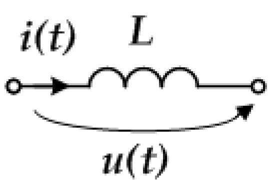
$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad \underline{U}_R = \underline{Z}_R \cdot \underline{I}_R = R \cdot \underline{I}_R$$

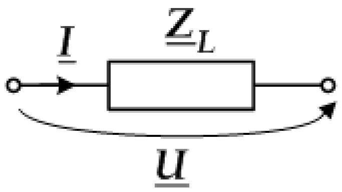
Rezistorul nu defazează curentul față de tensiune ($\varphi_R = 0$), adică cele două sinusoide sunt în fază (fig. 1.7a), respectiv cei doi vectori în complex sunt paraleli (fig. 1.7b).

De asemenea, parametri dipolului prezentați anterior pentru acest element de circuit sunt:

$$R_R = R; \quad X_R = 0; \quad G_R = \frac{1}{R}; \quad B_R = 0.$$

B. Bobina ideală





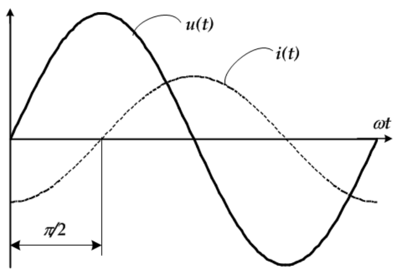


Fig. 1.8a. Bobina în domeniul timp (simbol și variații mărimi)

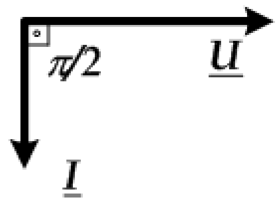


Fig. 1.8b. Bobina în domeniul complex (simbol și variații mărimi)

Ecuațiile caracteristice în domeniul timp, cât și complex sunt:

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \underline{U}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L$$

Bobina defazează curentul față de tensiune ($\varphi_L = \pi / 2$), adică cele două sinusoide sunt în cuadratură (fig. 1.8a), respectiv vectorul curentului în complex este defazat cu $\pi/2$ în urma vectorului tensiunii (fig. 1.8b).

De asemenea, parametri dipolului prezentați anterior pentru acest element de circuit sunt:

$$R_L = 0; \quad X_L = \omega L; \quad G_L = 0; \quad B_L = \frac{1}{\omega L}.$$

C. Condensatorul ideal

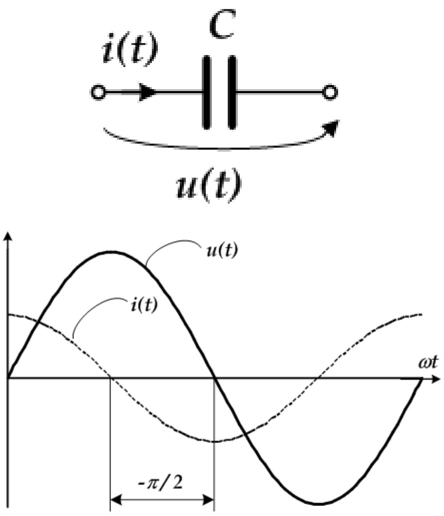


Fig. 1.9a. Condensatorul în domeniul timp (simbol și variații mărimi)

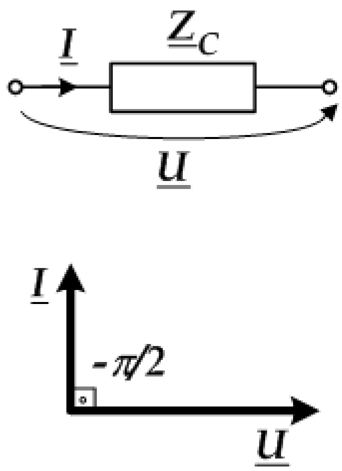


Fig. 1.9b. Condensatorul în complex (simbol și variații mărimi)

Ecuațiile caracteristice în domeniul timp, cât și complex sunt:

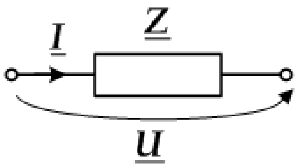
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(\mathrm{t})\mathrm{d}t \qquad \underline{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_C = \frac{-j}{\omega C} \cdot \underline{I}_C$$

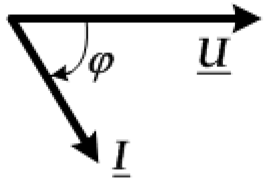
Condensatorul defazează curentul față de tensiune ($\varphi_C = -\pi/2$), adică cele două sinusoide sunt în cuadratură (fig. 1.9a), respectiv vectorul curentului în complex este defazat cu -$\pi/2$ în urma vectorului tensiunii în complex (fig. 1.9b).

De asemenea, parametri dipolului prezentați anterior pentru acest element de circuit:

$$R_C = 0;\ X_C = \frac{1}{\omega C};\ \ G_C = 0;\ B_C = \omega C.$$

Toate aceste elemente pasive pot fi întâlnite pe o latură a unui circuit, astfel încât, în cel mai general mod, putem defini orice latură pasivă în domeniul complex prin <u>*consumatorul real*</u>:





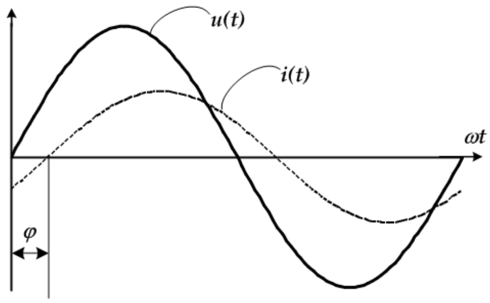


Fig. 1.10. Caracterizarea consumatorului real

Ele poate fi caracterizat după cum urmează:

$$\underline{Z}_{real} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}};\ R_{real} = R;\ X_L \,/\, X_C;\ \ G_{real} = \frac{1}{R};\ B_L \,/\, B_C.$$

<u>*I.5. Ecuațiile Kirchhoff în formă simbolică*</u>

Pentru circuitele electrice liniare, formate din rezistoare, bobine, condensatoare, surse independente și/sau comandate de tensiune și curent, ecuațiile teoremelor lui Kirchhoff în instantanee au următoarele expresii:

$$\sum_{k \in N_j} i_k(t) = 0,\ j = \overline{1, N-1},$$

$$\sum_{k \in B_h} \left[R_k i_k(t) + L_k \frac{\mathrm{d} i_k(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{p=1, p \neq k}^{l} L_{kp} \frac{\mathrm{d} i_p(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_k} \int i_k(t) \mathrm{d}t \right] +$$
$$+ \sum_{k \in B_h} \left[u_{Jk}(t) + u_{Jck}(t) \right] = \sum_{k \in B_h} \left[e_k(t) + e_{ck}(t) \right]$$

Ținând cont de teoremele prezentate anterior, se obțin formulele în complex ale ecuațiilor:

$$\sum_{k \in N_j} \underline{I}_k = -\sum_{k \in N_j} \left(\underline{J}_k + \underline{J}_{ck} \right),\ j = \overline{1, N-1},$$

$$\sum_{k \in B_h} \left[R_k \underline{I}_k + j\omega L_k \underline{I}_k + \sum_{p=1, p \neq k}^{l} j\omega L_{kp} \underline{I}_p + \frac{1}{j\omega C_k} \underline{I}_k \right] + \qquad ,\ h = \overline{1, B}.$$
$$+ \sum_{k \in B_h} \left[\underline{U}_{Jk} + \underline{U}_{Jck} \right] = \sum_{k \in B_h} \left[\underline{E}_k + \underline{E}_{ck} \right]$$

Prima teoremă a lui Kirchhoff: suma algebrică a reprezentărilor în complex ale curenților laturilor conectate într-un nod este egală cu zero.

A doua teoremă a lui Kirchhoff: suma algebrică a reprezentărilor în complex ale căderilor de tensiune rezistive, inductive, capacitive, de la bornele surselor ideale independente și/sau comandate de curent este egală de-a lungul fiecărei bucle cu suma algebrică a reprezentărilor în complex ale tensiunilor electromotoare ale surselor independente și/sau comandate de tensiune.

O scriere mai compactă a ecuațiilor se poate obține cu ajutorul mărimi $\underline{Z}$, numită impedanță complexă.

$$\underline{Z}_{R_k} = R_k\,, \quad \underline{Z}_{L_k} = j\omega L_k\,, \quad \underline{Z}_{C_k} = \frac{1}{j\omega C_k} \text{ și } \underline{Z}_{K_p} = j\omega L_{K_p}\,;$$

$$\sum_{k\in N_j} \underline{I}_k = -\sum_{k\in N_j}\left(\underline{J}_k + \underline{J}_{ck}\right),\ j = \overline{1, N-1}\,,$$

$$\sum_{k\in B_h}\left[\underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{p=1,p\neq k}^{l} \underline{Z}_{k_p} \underline{I}_p + \underline{U}_{j_k} + \underline{U}_{j_{ck}}\right] = \sum_{k\in B_h}\left[\underline{E}_k + \underline{E}_{ck}\right],\ h = \overline{1, B}\,,$$

cu $\underline{Z}_k = \underline{Z}_{R_k} + \underline{Z}_{L_k} + \underline{Z}_{C_k}$.

Analogia formală între ecuațiile circuitelor de curent continuu și ecuațiile în complex, permit extinderea metodelor de analiză și a teoremelor în curent continuu și pentru circuitele de curent alternativ, cu corespondențele:

$$I \leftrightarrow \underline{I};\quad U \leftrightarrow \underline{U};\quad E \leftrightarrow \underline{E};\quad J \leftrightarrow \underline{J};\quad R \leftrightarrow \underline{Z}\,.$$

I.6. Teorema lui Joubert (legea lui Ohm în complex)

Pentru o latură de circuit completă, caracterizată de un rezistor, o bobină (cuplată magnetic eventual), un condensator și o sursă de tensiune electromotoare, ecuația tensiunii la borne în valori instantanee este:

$$u_k(t) = R_k i_k(t) + L_k\frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{p=1,p\neq k}^{l} L_{kp}\frac{\mathrm{d}i_p(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_k}\int i_k(t)\mathrm{d}t - e_k(t)\,.$$

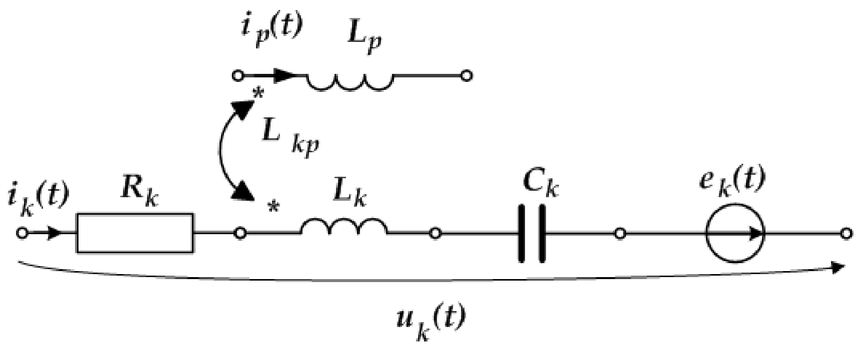


Fig. 1.11. Latura completă de circuit în domeniul timp

În complex, acesta devine:

$$\underline{U}_k + \underline{E}_k = (R_k + j\omega L_k - \frac{j}{\omega C_k})\underline{I}_k + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} j\omega L_{kp}\underline{I}_p \Rightarrow$$

$$\underline{U}_k + \underline{E}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{p=1, p\neq k}^{l} \underline{Z}_{kp}\underline{I}_p,$$

care reprezintă *legea lui Ohm în complex* (*teorema lui Joubert*).

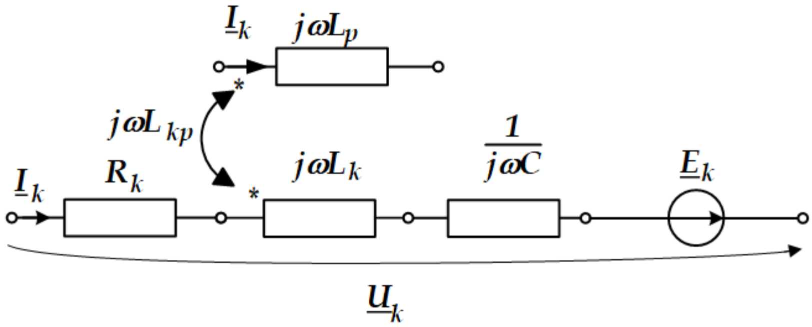


Fig. 1.12. Latura completă de circuit în complex

Dacă circuitul nu are cuplaje magnetice $(\underline{Z}_{kp} = 0)$:

$$\underline{U}_k + \underline{E}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k$$

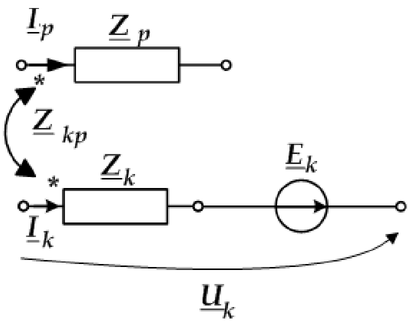


Fig. 1.13. Latura completă restrânsă de circuit în complex

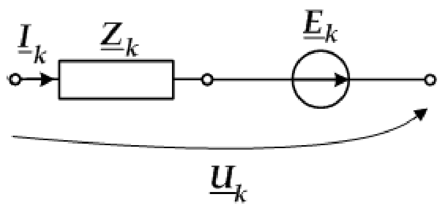
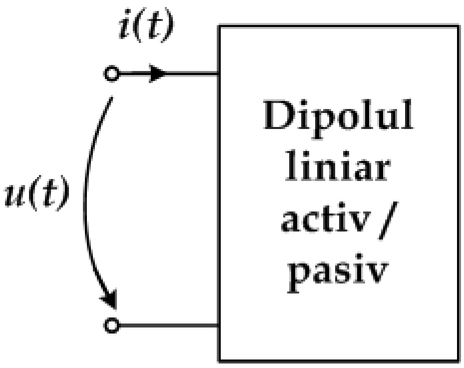


Fig. 1.14. Latura completă de circuit în complex, fără cuplaj magnetic

I.7. Puteri în regim sinusoidal

Un dipol liniar pasiv/activ este univoc caracterizat prin perechea de mărimi $u(t)$ și $i(t)$:



$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_I),$$
$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_U).$$

Fig. 1.15. Dipolul liniar pasiv/activ

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2U \cdot I \sin(\omega t + \alpha_U)\sin(\omega t + \alpha_I)$$
$$= U \cdot I \cos(\underbrace{\alpha_U - \alpha_I}_{\varphi}) - U \cdot I \cos(2\omega t + \alpha_U + \alpha_I).$$

$\rightarrow$ pentru $\varphi = 0 \Rightarrow P = U \cdot I$,

$\rightarrow$ pentru $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0$.

Un circuit este prin definiție un circuit receptor dacă în medie pe o perioadă primește mai multă energie decât cedează. Circuitul generator este prin definiție cel care, în medie pe o perioadă, cedează energie.

Puterea fluctuantă $UI\cos(2\omega t + \alpha_U + \alpha_I)$ are valoarea medie nulă pe o perioadă de timp, pentru funcțiile sinusoidale.

$$P \overset{d}{=} \frac{1}{T}\int_0^T p(t), \qquad [P]_{\mathrm{SI}} = 1\,\mathrm{W}.$$

$\rightarrow$ în regim sinusoidal: $P = U \cdot I \cos\varphi$.

$\rightarrow$ pentru fiecare element pasiv prezentat anterior avem:

$$P_R = R \cdot I^2 = G \cdot U^2; \qquad P_L = 0; \qquad P_C = 0.$$

A. Puterea reactivă prin analogie cu *P*:

$$Q \overset{d}{=} U \cdot I \sin\varphi, \qquad [Q]_{\mathrm{SI}} = 1\,\mathrm{VAR}.$$

$\rightarrow$dacă: $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ = regim inductiv $\Rightarrow Q > 0$,

$\rightarrow$dacă: $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < 0 =$ regim capacitiv $\Rightarrow Q < 0$.

$$Q_R = 0;\ Q_L = \omega \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{\omega L}U^2;\ Q_C = -\frac{1}{\omega C}I^2 = -\omega \cdot C \cdot U^2.$$

B. Puterea aparentă: se definește ca produsul dintre tensiune și curent

$$S \overset{d}{=} U \cdot I = Z \cdot I^2 = Y \cdot U^2, \qquad [S]_{\mathrm{SI}} = 1\,\mathrm{VA}.$$

Pentru elementele pasive putem defini:

$$S_R = U \cdot I = R \cdot I^2 = G \cdot U^2;$$

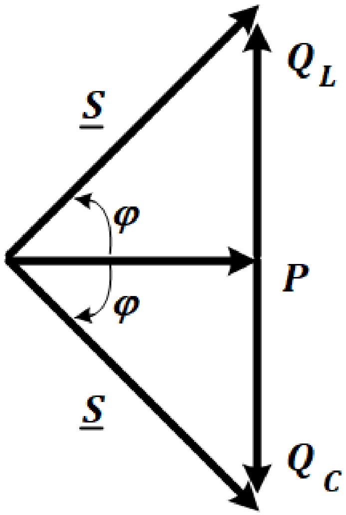
$$S_L = \omega \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{\omega L}U^2;$$

$$S_C = \frac{1}{\omega C}I^2 = \omega \cdot C \cdot U^2.$$

C. Puterea aparentă complexă:

$$\underline{S} \overset{d}{=} \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = U \cdot I \cdot e^{j(\alpha_U - \alpha_I)} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi}$$
$$= U \cdot I(\cos\varphi + j\sin\varphi) = S\cos\varphi + j \cdot S\sin\varphi = P + jQ.$$

Cu ajutorul cele trei puteri putem defini triunghiul puterilor (fig. 1.16).



$$\left.\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ P &= S\cos\varphi \\ Q &= S\sin\varphi \end{aligned}\right. \Rightarrow \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{Q}{P}$$

Fig. 1.16. Triunghiul puterilor

Raportul dintre puterea activă și puterea aparentă se numește **factor de putere:**

$$K \overset{d}{=} \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \cos\varphi .$$

<u>Obs</u> În transportul energiei electrice se urmărește ameliorarea factorului de putere ($\cos\varphi \nearrow 1$), deoarece pierderile de putere pe o linie bifilară sunt invers proporționale cu $\cos^2\varphi$:

$$P_J = R_f \cdot I^2 = R_f \frac{P^2}{U^2 \cdot \cos^2\varphi} .$$